

Title	對稱群ノ表現ニツイテノ一注意
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 202 p.336-p.340
Issue Date	1940-09-21
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74809
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

879. 對稱群ノ表現ニツイテノ一注意

中山 正 (阪大)

對稱群ノ表現論デハヨク知ラレテキル様ニ所謂 *tableau* (*diagram*) が重要且ツ便利ニ使ハレル。即チ n 個ノ文字ノ對稱群 S_n ノ表現論ニハ n 個ノ文字 $1, 2, \dots, n$ ノ *tableau*

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu_1}$$

$$T: \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\mu_2}$$

$$\rho_1, \dots, \rho_{\mu_r}$$

($\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r, \mu_1 + \dots + \mu_r = n$)ヲ考ヘル。タビシ $\alpha, \dots, \beta, \dots, \dots$ ハ適當ニ順序デ $1, 2, \dots, n$ ト一致スル。各 T ノ *tableau* カラ各行ノ中ガケ或ハ各列ノ中ガケテ文字ヲウゴカス置換ヲ考ヘルコトニヨツテ對應スル巾等元が得ラレル。ソレヲハ *primitive* デアル。更ニ T, T' がニツノ *tableau* デシカモ互ニ異ニ文字ノ置換カハ移レナイモノナラバ、即チ $T' = T$ スベテ (1) ヲ附ス時 (μ_1, \dots, μ_r) ト $(\mu'_1, \dots, \mu'_{r'})$ トが一致シナイナラバ、ソノ場合ニハ對應スル巾等元がツクラレルイデヤルハ互ニ *orthogonal* デアル。而シテコレヲノ事ヲ証明スルニハ、次ノ *Reumann's Lemma* が有效ニ使ハレル (Van der Waerden: *Moderne Algebra II*, 正田: 抽象代數學, Weyl: *Classical*

groups)

Lemma: $\mu_1 - \mu'_1, \mu_2 - \mu'_2, \dots$ ノ中デ
初メテ O デナイモノガ正 (コノ時 $T > T'$ トカク), 或ハ
ソウデナクトモ $\mu_1 - \mu'_1, \mu_2 - \mu'_2, \dots$ ガスベテ O
($T \sim T'$) デアツラモ T カラ T' ガ先ツ T ノ縦列中ダケ
デ文字ノウゴク置換ヲホドコシ更ニ今度ハ T ノ横行中ダケデ
文字ノウゴク置換ヲホドコスコトニヨツテ得ラレナイナラバ
ソノ場合ニハ必ず T ノ中デハ同一ノ横行ニアリ, T' ノ中デ
ハ同一ノ縦列ノ中ニアルヤウナニツノ文字が存在スル。

扱テ、コノ様ニシテ得ラレタ *primitive* ナ巾等元ニ
對應スル既約表現ノ構造, 即チカール巾等元デ生成サレタ左
又ハ右いぢやるノ構造ヲシラベヨウトスルト更ニ互ニ文字
ノ置換デ移レルヤウナ, 即チ互ニ \sim ナ, *tableau* ノ
間ノ關係モシラベナケレバナラナクナル。ソノタメ *standard*
tableau ガ *Young* = ヨリ導入サレタ (Specht,
Zeitschrift 38, 39 項参照)

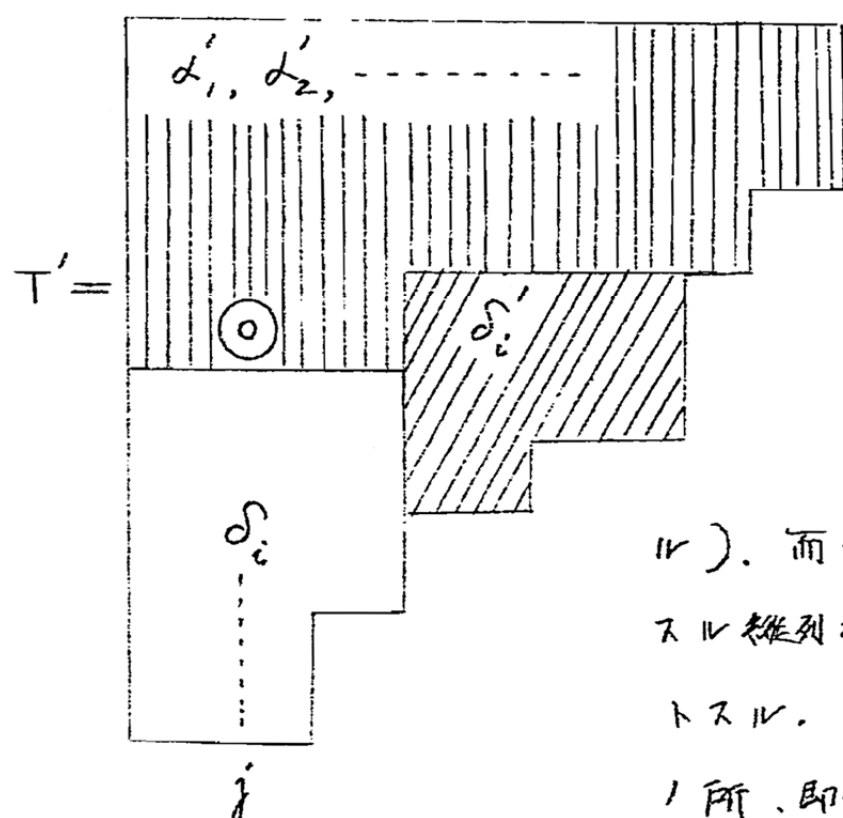
ソレハ各行各列ニオイテ數字ガ單調増加, 即チ右下ニ行
クホド大キクナツテキル様ニ配置サレタ *tableau* ノコト
デアル。ソウスルト或ル T = 對應スル既約表現ノ次數ガ
丁度 T ト \sim ナ *standard tableau* ノ数ト一致
シ, シカモソレ等 *standard tableau* カラ上記い
ぢやるノアル基ガ實際ニ得ラレルノデアル。而シテコノコト
ハ Specht ハ計算的ニ出シテキル。

コニデ自合ガ注意シヨウトイフノハ、コノコトモ丁度上

1) Lemma ト類似ノコトヲ *standard tablean*
ノ間ニ証明シテ、ソレニヨツテ丁度同ジヤウニ多元数論的
ニ議論ヲ進メルコトが出来ルトイフコトデアル。即チ

Lemma. T, T' ヲ互ニ \sim ナニツノ *standard tablean* トスル。ソシテ $\alpha_1 - \alpha'_1, \alpha_2 - \alpha'_2, \dots, \beta_1 - \beta'_1, \beta_2 - \beta'_2, \dots$ (コノ順序デ) ノ中最初 $= 0$ デナイモノガ負デアルトスル。シカラバ T デハ同一ノ横行 $= T'$ デハ同一ノ縦列ニアルヤウナニツノ数字が存在スル。

証明ハ簡單。初メテ 0 デナイモノガ $\delta_i - \delta'_i$ デアルトスル。假定ニヨリ $\delta_i < \delta'_i$ デアルカラ δ_i ナル文字ハ T' ノ中デハ δ'_i ノ右下ニハアリ得ナイ。(T' ハ *standard*) 即チ下圖ノ斜線 $////$ ノ部分ニハナイ。更ニ $\delta_i - \delta'_i$ が 0 デナイノ最初ダトイフコトカラ縦線 $||||$ ノ部分ニモア



リ得ナイ。即チ白イ部分ノドコカニアル(コノ事カラ先ヅ確カニ $i > 1$ ガワカ

ル)。而シテ今、 δ_i ノ存在スル縦列ガ第 j 列デアルトスル。シカラバ圖ノ \odot 印ノ所、即チ δ'_j ナル文字ヲ考ヘル。コノ所ハ δ'_i ノ

トコロアリ。早イトコロデアルカラ假定ニヨリ $\delta_j = \delta'_j$ デ
アル。即チ δ_i ト $\delta'_j = \delta'_j$ ナルニツノ文字ハ丁ノ中デハ同
一ノ行 (δ) ノ中ニアリ 丁' ノ中デハ同一ノ列 (第 j 列)
ノ中ニアル。 終リ。

(或ヒハ上ノ *Heumann* ノ場合ニ帰着サセル証明モアルカ
モ知レナイ。而シテソウスレバ或ヒハモット *standard*
tableau 間ノ關係ガハツキリ宛明サレルカモ知レヌ)

コノ *Lemma* ヲツカフト、丁度 *Heumann* ノオ
ヲ〜デナイ *tableau* = 属スル巾等元カラツクラレタ
いでやもガ *orthogonal* ナコトガワカッタヤウニ、果ル
standard tableau = 属スル巾等元カラツクラレタ片
側いでやもガミナ独立デアルコトガワカル。

而シテ *group ring* ノ構造ノ *analysis* ヲ完成ス
ルタメニハ、コレ等ノいでやもノ和ガ *group ring* 全体
ニナルコト、イハジ *completeness* フ云ヘバヨイ。所ガ
實ハコレガ難カシイ。現ニ *Specht* ノデモコレニ相當スル
部分ハ全然別ニ一應對稱群ノ表現論ガスデニ與ヘラレテキル
トシテ、或ヒハ少クモソノ次數ノヨク知ラレタ値ガ知ラレテ
キルモノトシテ、ソレニヨツテ一次独立ナ元ノ數ヲ上カラオ
トヘテ証明シテキル。コノデモ同ジヤウニ次數ガワカッテキ
レバ、ソレカラ直チニ要求スル結果ガ出ル。即チ少クモ
Specht ガ *polynomial* ノ計算デ出シテ居ル部分ニ相
當スルコトハ上ノ *Lemma* ニヨル多元環論的考察デオキ
カヘルコトガ出來ルワケデアル。

(上ノイハゞ completeness ノ方、即チ独立ノヲ上カラオ
 サヘル方ニハドウモヤハリ例ノ行列式ノ公式ナドモ出テ來ル
 計算ガ要ラシイ。實際、單ニ〜デナイ *tableau* = ヨ
 ル表現デスベテノ表現ガツクサレトイフコトノ証明(例1)
 = 廿ハ *conjugate classes* ノ數ト *tableau* ノ數
 ノ比較云々トイフ幾分別ノ計算的方法ヲ使フワケガカラ今ノ
 場合ナホサラソレハ止ムヲ得ナイカモ知レナイ。然シ他方今
 ノ場合ハスツカリ独立ノ中等元ガ *construct* 出來、ソシ
 テ互ニ *orthogonal* + *primitive* ノ中等元ノ
System モ計算出來テキレワケ(形ハ複雑ダガ)ダカラ、
 何カウマイ方法ガアツテモ良サソウニモ思ハナイコトモナイ)